07/10/17~11/21.

ー量子論の構造(1)ー

重力場＝Einstein 等価原理＝内山局所 Lorentz 変換不変性から量子重力場が完全な一般ゲージ場変換則を満たす事を最後に証明。この後は Faddeev. Popov の一般 guage 場量子化法に従い、guage 対称性 SO(N;1) 量子化 Lagrangean が完全決定。一度 Lagrangean が決まると後は一定算術で全力学系情報は確定。とは言えど色々技巧を要するのですが，それは今後報告予定。なほ冒頭では量子論理の凄さ一旦を紹介。

原子分子と素粒子,固体液体物性等のミクロマクロ現象を扱うのが**量子力学(QM)**と呼ばれ,20 世紀初頭に始まるから 100 年老舗にも関わらず未だに誤解や難問も多々ある。結論から言えば僅かに二つの原理<**量子化原理と一般ゲージ原理**>から演繹的に構成できる事が最近判明したが公開にはない。本論ではこれら二つを中心に量子論を紹介しようと思う。

物理学は歴史的には経験科学だが,本論では**経験超集約**としての論理学視点から展開する.実は我々思考法＝**論理**には既に自然原理が既に組み込まれてると言えば驚きかも知れない。我々経験は限定されており,他方論理には**無矛盾**ならば何ら制約がない。余りに当たり前のこの無矛盾性は物質性質根源が既に組み込まれてる超原理です。

[第０部]：観測の量子論。

量子論は最精密な物質科学、最精密とは曖昧さのない事、曖昧さとは測定値±誤差範囲。と言う事は測定値 x に誤差内の任意数 Δx を加算した物、減算した物かも知れないの A かも,B かもの **or 命題**で絡る事が判る.然し x＋Δx、かつ x－Δx と言う値が**最精密状態**に関して同時実現する **and 命題**は不成立<物質世界無矛盾性>。かような観測命題特質と最精密状態個々は**直交系ベクトル**個々に一々に対応できる。他方**観測行為**とは物差しと対象の一致不一致確認行為、対象が持つ複数物理量に関してその属性に関する物差しへの**射影操作**になる。観測対象ベクトルに物差しを平行位置配置の操作が**射影演算子**。物差し長さ伸張が**固有値**＝最精密状態の測定値に対応。この後は関数解析の議論から最精密状態－**量子状態は関数空間要素{正規直交関数系}**、観測作用の射影演算子は**自己共役演算子**に対応する手順で証明される。

❶**観測行為一般の対象干渉性<詳細は受動測定と能動測定の概念が必要>**：
我々の日常的大きさ(マクロ)での測定では、測定対象に影響がないと言う暗黙の前提があろう.古典力学での惑星運動などは、望遠鏡観測が運動に影響するなどない。ところミクロ電子などになるとそれに γ 線や電子線を照射して反射波を観測するから大きな影響を被観測対象に与える事実がある<生物系はマクロ大だがミクロ化学分子系でもあるから影響がでる、X 線写真等は無闇に取らない>.**量子**とはミクロ·デジタルな意味。

❷**量子論の概要：無矛盾性と確率実現性：**
本講座読者は何回も見ただろうが物質世界最大性質は現象 B とその否定命題 nB が W イメージで見える事がない**観測無矛盾性**。原因 A→結果 B の一意推移実現性である。但し **A に情報不足**があると結果 B＝{B_1, B_2, B_3, ... , B_k, . . . }の**多岐確率実現**が起こる.

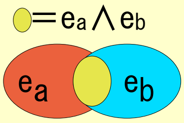
❸量子論は正にこの構造になっている<**一般量子系の不完全命題性**>。その理由は明確で上記**観測過程の不完全性＝量子物質反応性**に起因してる。核心の反応には**情報不足**が発生している。それは化学反応等に介在する光子(電磁場)、電子等の**素粒子の大きさが点状態＝実数０**であり,この**数学的特異性が起源**に成っている。

☞：量子電磁気等(標準理論)で反応は電磁場 X 電子場演算子の積になるがこれらは超関数積になり,その特異点共有は数学的に定義できず,ここから因果律でない非決定性＝確率化算術が発生、利用される。

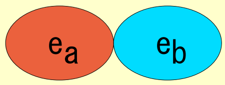
❹観測論：原始的観測の意味、観測＝射影操作、ベクトル空間と自己共役演算子。

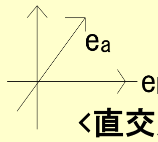
①原子的観測：<文献:Birkov, G. & Neumann, J, V:Ann. Math, 2nd Ser, 37, 823(1936)>

対象の曖昧な測定は e_a, or e_b, or e_c, 等と言う **or 命題**になる。もはや or 分解不可能な極限命題を**原子命題**と言う。それらを $\{e_0, e_1, e_2, e_3, ..., e_k, ..., e_N\}$ と命名, **最精密測の状態**に対応. 注意すべきは e_a and e_b, の観測命題は**物質無矛盾性❷**から不可能. と言う事は観測された**最精密状態の個々は重なりが無く,”分離”してる事になる。**結論から言えば原子的状態は<u>相互に射影重なりのない**直交ベクトル系**の個々のベクトルに**一一対応**できる事になる</u>。☞：非保存的時間依存な物理量である一電子の存在位置は測定前には同時に多箇所存在可能、だが測定では一箇所. **保存物理量では測定無関係に一意決定.**

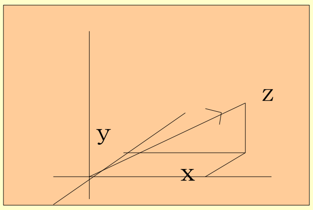


<<物質無矛盾性から実現しない！, ∧≡and>>

<<分離してる>>




<直交座標系>



②左図の直交座標系で原点から座標(x, y, z)に向かうベクトル **a** を**測定**する。ここで座標成分(x, y, z)とは **a** の名直交軸への**射影**に他ならない。物差しを当てるとは射影行為に相当する。重さの基準重りがある。ばね計りの目盛りが怪しくても針位置が一致すれば。基準重りと計測物重量は一致と判断可能<**射影一致**>.

③N 次元正規直交ベクトル系：<☞：T は転置行列、TT＝1、*は複素共役量を意味。>

$|\mathbf{e}_j\rangle \equiv (0_1, 0_2, \cdots, 1_j, \cdots, 0_N)^T] \equiv |j\rangle$. ; $\langle \mathbf{e}_j| \equiv (0, \cdots 0, 1_j, 0 \cdots 0)] \equiv \langle j|$.

$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle \equiv (a_1, \cdots, a_N)^*(b_1, \cdots, b_N)^T \equiv \Sigma_{k=1}{}^N a_k{}^* b_k = (\Sigma_{k=1}{}^N b_k{}^* a_k)^* = \langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle^*$.

⇒ $\langle \mathbf{e}_k|\mathbf{e}_j\rangle \equiv \delta_{jk}$. 単位直交ベクトル相互間内積は０. **相互射影０は重なりが無を意味。**

④射影演算子：

<u>成分 a_k 値をベクトル **a** から e_k **への一意対応させる射影演算子** $\mathbf{A}^k$ を定義すれば</u>

(1) $\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{a} \equiv a_k \mathbf{e}_k{}^T = (0, 0, \cdots, 0, a_k, 0, \cdots, 0)$.

射影演算は $\mathbf{A}^k$ は**線形演算子**だからベクトル空間の**行列**に対応する。*は複素共役量。

(2) $a_k = \langle \mathbf{e}_k|\mathbf{A}^k \mathbf{a}\rangle \equiv \langle \mathbf{A}^k \mathbf{e}_k|\mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{a}|\mathbf{A}^k \mathbf{e}_k\rangle^* = a_k{}^*$.　← **＜自己共役性＞**

(3) 演算子 $\mathbf{A}^p$ の jk 行列成分 $\equiv \mathbf{A}^p{}_{jk} = \langle \mathbf{e}_j|\mathbf{A}^p \mathbf{e}_k\rangle = \delta_{jk}\delta_{pk}$.

$\langle \mathbf{e}_j|\mathbf{e}_p\rangle\langle \mathbf{e}_p|\mathbf{e}_k\rangle = \delta_{jp}\delta_{pk} = \delta_{jk}\delta_{pk} = \langle \mathbf{e}_j|\mathbf{A}^p \mathbf{e}_k\rangle$. ⇒ $\mathbf{A}^p \equiv |\mathbf{e}_p\rangle\langle \mathbf{e}_p|$.　　❹④(4)

(2)≡関係は射影演算子の**自己共役性**と言われ観測量の最も基本的な**実数値性**に対応。
❹④(4)は<u>直交ベクトル(最精密状態 $|\mathbf{e}_p\rangle$) を抽出する演算子</u>になる事に留意。

⑤観測値を引き出す射影演算子：

❹④(4)を利用すると最精密状態の物理量観測値を引き出す演算子が簡易に構成可能。
<u>$|\mathbf{e}_p\rangle$状態には通常複数物理量が付随するはずだが、その一つを $q_p{}^{(k)}$ とすれば、</u>

$\mathbf{Q}_p{}^{(k)} \equiv q_p{}^{(k)}) |\mathbf{e}_p\rangle\langle \mathbf{e}_p|$.　(1)

$\langle \mathbf{e}_p|\mathbf{Q}_p{}^{(k)} \mathbf{e}_p\rangle = q_p{}^{(k)}$.　(2)

k は一状態の複数物理量に対応する添字、p は可能な複数精密状態の個々に関する添字。

❺関数空間(量子状態＝波動関数)と自己共役演算子(観測演算子としての物理量)：

①無限次元ベクトル空間としての関数空間：

⑴**単位直交ベクトル系＝正規直交関数系：**<δ(x)はdelta関数>.

関数f,gがあればその定数倍の和af＋bgも関数だから**関数の集合はベクトル空間。**
そこに線形演算子があれば行列に対応。その表現を考えるには直交ベクトル系が必要。
これに対応する関数集合が**正規直交関数系**$\{e_\omega(x)|\omega=[0,\infty]\}$と言う. ここに添字ωは
1,2,3,････の離散整数でも実数でもOK、頻用されるのがFourier成分関数≡$\{e^{i\omega x}\}$.
以下の⑴は関数fとf'の内積演算である。離散系の内積$\Sigma_{\omega=0}{}^{\infty}f_\omega f'_\omega$に対応してる。

$$\langle f|f'\rangle\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}dx\langle(2\pi)^{-1/2}e^{i\omega x})^*|(2\pi)^{-1/2}e^{i\omega' x})\rangle$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{i(\omega'-\omega)x}=\delta(\omega'-\omega).\qquad\cdots\cdots❺①(1)$$

⑵**任意関数の正規直交関数系による展開表現：**

任意vector $\mathbf{a}=\Sigma_{k=1}{}^{N}a_k\mathbf{e}_k$と単位直交系vectorの線形和で表現できるのと同様に任意関数a(x)は直交関数系の展開総和(離散関数列和,又は連続添字関数積分)で表現できる.

$$a(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega C(\omega)e_\omega(x).\qquad a(x)=\Sigma_{\omega=0}{}^{\infty}C_\omega e_\omega(x).$$

②自己共役演算子と固有関数系：{☞：$e_k(x)\equiv|k\rangle$；$e_k(x)^*\equiv\langle k|$は正規直交系}.

$$(1)\ Q_{jk}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dxe_j(x)^*\mathbf{Q}\,e_k(x)\equiv\langle j|\mathbf{Q}|k\rangle\equiv\underline{\langle e_j(x)|\mathbf{Q}\,e_k(x)\rangle\equiv\langle\mathbf{Q}\,e_j(x)|e_k(x)\rangle}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx[\mathbf{Q}\,e_j(x)]^*e_k(x)=Q_{kj}{}^*.\qquad\cdots\cdot(1)$$

⑴式下線部分が**自己共役演算子Qの定義**、行列成分表示では$Q_{jk}\equiv=Q_{kj}{}^*$.
$Q_{jj}\equiv=Q_{jj}{}^*$. だから**対角線要素は全て実数**に留意。**線形代数一般定理**から通うな
<u>自己共役演算子は**実数固有値**$\{q_k\}$と対で**固有直交関数系**$\{e_k(x)\equiv|k\rangle\}$を持つ。</u>

$$\mathbf{Q}\,e_k(x)=q_ke_k(x)\ (\equiv\mathbf{Q}|k\rangle=q_k|k\rangle).\qquad\cdots\cdot(2)$$

$\mathbf{Q}\,e_k(x)=q_ke_k(x)$；$\mathbf{Q}\,e_j(x)=q_je_j(x)$を⑴に代入すれば$Q_{j\neq k}=0$、
対角線要素$\{Q_{kk}\}=\{q_k\}$以外は全て０が判る<**対角化**>.

⑵**非可換(自己共役)演算子：PQ－QP≠0**は固有関数を共通にしない. もし共通すると矛盾になる。$\langle j|\mathbf{PQ}-\mathbf{QP}|k\rangle=\langle j|\mathbf{PQ}|k\rangle-\langle j|\mathbf{QP}|k\rangle=(p_kq_k-q_kp_k)\langle j|k\rangle=0$.

⑶**Unirary変換：<vectorの自身と相互間内積を不変に保存する変換＝空間回転>.**

量子力学本質一つは各種変換における物理量の振る舞い<特に不変性>が重大になる。
特に関数の内積値を不変にする変換をUnitary変換Uと呼ぶ。^{*T}は複素共役と行列転置。

$$g\equiv Uf、g'\equiv Uf',\Rightarrow\ \langle g|g'\rangle\equiv\langle Uf|Uf'\rangle\equiv\langle f|f'\rangle=\langle f|U^{*T}U|f'\rangle。\qquad\Rightarrow\ U^{*T}=U^{-1}。$$

上記は関数に対する作用を見たが、以下では演算子Qに対するUの作用を見る。

$$\{g=Qf\ ;\ f'\equiv Uf,g'\equiv Ug\}.\ \Rightarrow\ g'\equiv Ug=UQf=UQU^{-1}(Uf)=UQU^{-1}f'\equiv Q'f'.\Rightarrow\ \{Q'\equiv UQU^{-1}\}.$$

③射影演算子としてのスペクトル展開＝(1):<❹⑤の一般化拡張に注意>

$\mathbf{Q}=\Sigma_{n=0}{}^{\infty}q_n|n\rangle\langle n|=\Sigma_{n=0}{}^{\infty}q_n\mathbf{A}^n$.　⇔　$\mathbf{Q}|n\rangle=q_n|n\rangle$.　(1)

自己共役演算子は観測操作＝(N=∞)の射影演算子❹④(4)～の$|n\rangle\langle n|$の固有値係数の線形和になる。q_nでの**スペクトル展開**という。**固有状態**$|k\rangle$は観測値q_nに対応する**一つの観測状態**になる。この時点で**原子状態**❹(1)が固有状態に対応し、その**観測操作**≡observable≡観測可能量≡**量子論的物理量**が**自己共役演算子**に対応してる事が明らかになる。なぜなら<u>状態と観測値の一対一対応が(2)</u>。(2)は最も基礎的関係になる.

$\langle n|\mathbf{Q}|n\rangle=\langle n|q_n|n\rangle=q_n$.　③(2)

$|k\rangle$ ←$\mathbf{Q}$→$q_k=\langle k|\mathbf{Q}|k\rangle$.

$|l\rangle$ ←$\mathbf{Q}$→$q_l=\langle l|\mathbf{Q}|l\rangle$.

$|m\rangle$ ←$\mathbf{Q}$→$q_m=\langle m|\mathbf{Q}|m\rangle$.

<直交状態系>

一つ力学系の観測対象と言えど実現される**最精密状態**はenergy,運動量等で様々な可能性があり,それらの個々を**量子状態**と呼ぶ。力学系自由度 Mに対応する最大観測量の組$\{\mathbf{Q}^k|k=1,2,..M\}$が存在し,それらは一つ状態に関して**同時観測値決定可能になる**.<④参照>。

④最大観測量Mとは交換可能な演算子のM個の組$\{\mathbf{Q}_k|k=1,2,..M\}$と定義される.それらは固有関数を共通にしながら異なる固有値系列$\{q_n{}^{(k)}|n=0,1,2,..\infty\}$を係数とする③(1)同型表現になる。「<u>従って一つの観測対象＝固有状態$|k\rangle$の下に$M=\{\mathbf{Q}_k|k=1,2,..M\}=\{q_n{}^{(1)},q_n{}^{(2)},.....,q_n{}^{(M-1)},q_n{}^{(M)}\}$と最大観測量</u>」が定義できる。最大観測量の意味は力学系自由度M個に一致する**保存物理量**,当然energy対応のHamil-tonianを含む。となるとenergy値確定は不確定性原理$\Delta E\Delta t\sim\hbar$から系は**定常系**に限定.水素原子の電子状態は座標自由度3に対応してエネルギ順位E_n,軌道角運動量l,磁気量子数mに対応。実は最大観測量は個々に独立でない。一つ観測量$\mathbf{Q}_a$は別観測量$\mathbf{Q}_b$の関数。$q_j{}^{(a)}=f(q_j{}^{(b)})$の関数関係になるから$\mathbf{Q}_a=f(\mathbf{Q}_b)=\Sigma_{p=0}{}^{\infty}c_p(\mathbf{Q}_b)^p$.だから一つ測定で全部判るから最大観測量の同時観測決定可能の意味にもなる事が判る。

⑤非可換物理量{P,Q}の同時非可観測性<完全命題性の破れ>と確率分岐性:

上記❺④可換物理量は同時確定観測可能の対偶命題として**同時確定観測でないの**が**非可換物理量**{P,Q}の組。**{P,Q}**の固有直交関数系を$\{|p\rangle\}$,$\{|q\rangle\}$と表示すれば直交関数による展開定理から次式,この状態での**P**測定を考える。、

$|q\rangle=\int dp\,c(p)|p\rangle$. → $1\equiv\langle q|q\rangle=\int dp'\,c^*(p')\langle p'|\int dp\,c(p)|p\rangle=\int dp|c(p)|^2$.

③(2) → $\langle q|\mathbf{P}|q\rangle=\int dp|c(p)|^2p$. $\equiv\langle p\rangle$.(**確率密度$|c(p)|^2$下でのp期待値**).・・・・・❺⑤

Qの固有状態$|q\rangle$に関する非可換物理量**P**の測定値は**射影性**から$|p\rangle$のいずれか一つに確定せねばなるまい。いずれかは**因果的事前確定しないのが非最大物理量性！**、と成ればGoedel不完全性定理の意味で**確率統計現象**になる。と成ると量子状態は$|q\rangle\rightarrow|p\rangle$と確率的に**時間発展状態遷移**してる事になる。上記最終式❺⑤はその確率密度が$|c(p)|^2$と成る形式に幸いある。これ証明には成らないが結果はその通りになる。

量子論では時間発展はまったくの確率現象になる。

❻[第０部]：観測の量子論(要約)：

⑴曖昧な測定とはor命題。測定値±誤差、誤差部分はor相当.→最精密状態＝**原子命題**
⑵一力学対象と規定しても**最精密状態**は様々に違う。それらは無矛盾性から同時非実現。
　→最精密状態の分離非重なり性。→ **全最精密状態(量子状態)**は**直交ベクトル系**に対応.
⑶観測行為は基準への一致不一致判定＝物差しを状態ベクトルに平行配置の**射影行為**.
　観測行為は最精密状態ベクトルへの**射影演算子**に対応。観測値は物差し伸張の固有値.

⑷関数空間の正規直交系が**量子状態**に対応/自己共役演算子と固有値形式から定理として、
　自己共役演算子のspector展開が射影演算子。→**可観測物理量**は**自己共役演算子**。

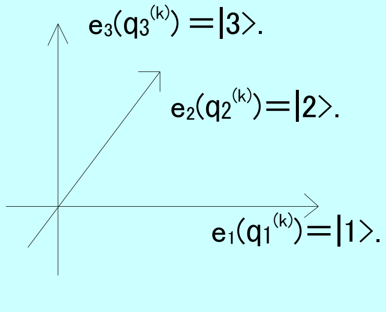
⑸一量子状態に関する同時可観測物理量の集合＝**最大観測量**。
　最大観測量は交換可能な自己共役演算子の集合。個数Mは力学自由度に対応。

⑹**非可換物理量{P, Q}の同時確定観測不可能性と測定値確率分岐性：**
　因みにこの測定は状態変化だから**時間発展**である事にも注目すべきである。

⑺一般的量子状態 ψ に関する**観測期待値：** $p=\langle\psi|P|\psi\rangle$。

⑻**大域guage変換不変性：**状態 ψ は複素関数、それを $\psi\to\psi e^{i\theta}$. としても上記pは不変。
$\int dx\,\psi^* e^{-i\theta} P\,\psi e^{i\theta}=\int dx\,\psi^* P\,\psi\equiv\langle\psi|P|\psi\rangle$。
但し θ は定数〈**大域guage変換**〉,
$\theta=\theta(x)$と時空変数依存の関数にした場合が**局所guage変換**、
この変換下で不変要求すると相互作用力が浮上〈**guage原理**〉。

☞：以上観測の量子論は抽象形式的で実感に乏しいが結果はOKだった。
☞：量子状態に関する最大観測量観測**M**の議論には一つの重大なfictionが隠されてる.
　量子状態は基本的に力学系の自己共役Hamiltonian≡H_0を持って規定される。
　非自己共役だと固有状態がそもそも存在できない。H_0系は有限時間区間にしても
　時間発展(反応状態遷移のない定常系)がない事が厳格に証明される。最大観測量**M**は
H_0の関数になり,当然時間発展のない量子状態を必要充分に規定の**保存物理量**になる。
H_0系に関して成立する事は測定の有無に無関係に固有状態一意実現性である。だから確率状態遷移過程は**Markov確率過程**になる。従来量子論では時間発展系は固有状態線形和とされてきたがこの議論こそがSchroedingerの犬の矛盾を呼んだ.詳細は後述。測定は情報量獲得だから熱力学第二法則的意味で不可逆過程になる。現実測定ではH_0の固有状態$|i\rangle\to|f\rangle$の量子遷移での**保存物理量の差**が外部放出されてその捕獲値$\Delta E=E_f-E_i$から算出される〈**受動測定**〉。可観測物理量には電子位置座標xの如く自己共役算子だが,保存物理量でない事から最大観測量とは別種になる物がある〈**能動測定**〉。
これへの入射波反射波観測では反応時間発展としての状態遷移が不可避付随になる。



$Q^{(k)}=\Sigma_{n=1}^{3}q_n^{(k)}|n\rangle\langle n|$.
$\langle n|Q^{(k)}|n\rangle=q_n^{(k)}$.

「最精密状態＝量子状態は直交ベクトル$|n\rangle$の一つに対応、
射影演算子 $Q^{(k)}$は$|n\rangle$を状態物理量倍の $q_n^{(k)}|n\rangle$に測定値長さを伸縮対応させる演算子」、
内積演算で長さ＝測定値を抽出 $\langle n|Q^{(k)}|n\rangle=q_n^{(k)}$.
(k)はN個ある物理量の内の一つ指定の添字。

[第１部]：正準量子化の原理：

話は形式的でもある.「初めに力学系を一意規定するLagrange関数≡$\mathcal{L}(q_\beta(t);q_\beta'(t))$があるー。$\mathcal{L}$はscalar量で無相互作用系は時空間性＝特殊相対論の**Lorentz不変量**, 有相互作用系は状態空間性の**一般ゲ-ジ変換不変**<この不変性こそが$\mathcal{L}$自身を一意決定<第二部変換原理>。正準形式の手続きに従い,正準運動量≡$p_\beta(t)$が決定。然るにPoisson括弧→$\{q_\beta,p_\beta\}=i\hbar 1$の対応の**正準交換関係**こそが核心になる。Schroedinger方程式の一般導出や素粒子生成消滅反応の量子系の計算基礎原理を与える事になる。

☞：量子化には更に上層がある。座標的変数ψ_αがあれば正準量子化には共役運動量変数Π_αがなければ交換関係設定不可. だが古典電磁場A_0には存在しない。そこで内山は$B=-\alpha^{-1}\partial_\mu A_\mu$導入で$\{A_0,B\}=i\hbar\delta(x-x')$.だが電磁場potential:$A_\mu$はguage変換下では場方程式は不変で物理的等価。この事は経路積分法と呼ぶ反応|i>→|f>計算経路途中にguage変換自由度相当分の過剰が起きる。そこで電磁場も含む一般guage場では固定化を$0=\alpha^a B^a+\partial_\mu A^a{}_\mu$で経路被積分関数に$\delta(\alpha^a B^a+\partial_\mu A^a{}_\mu)$を組み込むがその反動で1にする補正(Faddeev.Popov項)が必要化。結果は$\{i\hbar\hat{c}^a\partial_\mu D_\mu c^a\}$の追加Lagrangean. $\{\hat{c}^a,c^a\}$はB^a場に次ぐ**双極子密度次元量**で重要な核子双極子形成quark反応の媒介裏方になる。真空中でも二枚電極で容量が形成できるがこれは真空の誘電分極、双極子場に由来する。

☞：力学構造は一般にLagrangeanで一意規定されるが、それはHamiltonianでも同様.
時間発展では$\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_s(t)\to\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_s(t)\to\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_s(t)\to\cdots\cdots$の自己共役保存的解析的因果的な$\mathcal{H}_0$→論理背反な$\mathcal{H}_s(t)$の**保守と革新が相互交代で実現**する事.
然るに非解析的$\mathcal{H}_s(t)$は**$\Delta t=0$の瞬時特異現象**、詳細は量子確率過程力学。

❶正準交換関係の原理(離散系)：

①古典力学形式：

(1)$\mathcal{L}(q_\beta(t);q_\beta'(t))$が初めにある。
(2)$p_\beta\equiv\partial\mathcal{L}/\partial q_\beta'$。($q_\beta'$の正準共役運動量)。
(3)$\mathcal{H}\equiv\Sigma_{\beta=1}{}^N p_\beta q_\beta'-\mathcal{L}$。

(4)**Poisson括弧**　:$[u,v]\equiv\Sigma_{j=1}{}^N[(\partial u/\partial q_j)(\partial v/\partial p_j)-(\partial v/\partial q_j)(\partial u/\partial p_j)]$.
$[q_j,q_k]=[p_j,p_k]=0$; $[q_j,p_k]=\delta_{jk}$.
(5)**正準運動方程式：**
$dq_j/dt=[q_j,\mathcal{H}]$; $dp_j/dt=[p_j,\mathcal{H}]$。

②離散変数の古典粒子的量子系$\mathcal{L}(q_j(t);q_j'(t))$の正準量子化。

(1)$\mathcal{L}(q_\beta(t);q_\beta'(t))$が初めにある。
(2)$p_\beta\equiv\partial\mathcal{L}/\partial q_\beta'$。($q_\beta'$の正準共役運動量)
(3)$\mathcal{H}\equiv\Sigma_{\beta=1}{}^N p_\beta q_\beta'-\mathcal{L}$。

(4)**正準量子化(正準交換関係)：**
$[A,B]\equiv AB-BA$.、< A,B は自己共役演算子≡**可観測物理量**>

$[\mathbf{q}_j,\mathbf{q}_k]=[\mathbf{p}_j,\mathbf{p}_k]=0$; $[\mathbf{q}_j,\mathbf{p}_k]=i\hbar\delta_{jk}1$.

上記関係は演算子代数を規定している事になる。

⑸**Relich-Dixmier 定理：**
交換関係$[q_j, p_k]=i\hbar\delta_{jk}1$.は任意変換 V で形式不変は容易に証明可能。
正準共役変数[**Q, P**]はある Unitary 変換＝**U** で Schroedinger (S)型変数に変換できる。

$q=\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^{-1}$; $p=\mathbf{U}\mathbf{P}\mathbf{U}^{-1}=-i\hbar\partial/\partial q$

☞：S 型交換関係は自明な数学定理、その意味で**正準量子化は原理から定理格下げになる。**
$[q;-i\hbar\partial/\partial q]f(q)=q(-i\hbar\partial f/\partial q)+(i\hbar\partial/\partial q)[qf(q)]=i\hbar f(q)$。

☞：$x_\mu\equiv(x_0=ict, x_1, x_2, x_3)$, $p_\mu=(p_0=iE/c, p_1, p_2, p_3)=-i\hbar\partial_\mu$.
R. D 定理から**運動量は座標微分演算子に対応**する事が判る。この対応は量子論では頻用されるので留意。

⑹**正準交換関係からの Schroedinger 方程式の一般導出：**<Lorentz 不変形式下で考察>
$x_\mu\equiv(x_0=ict, x_1, x_2, x_3)$. $p_\mu=(p_0=iE/c, p_1, p_2, p_3)$. **時刻 $x_0\equiv ict$ に限ってその正準共役変数を考えると二つもある。**一つは S 型の$-i\hbar\partial/\partial x_0$, 他は正準共役変数積の作用次元量性から energy 次元の Hamiltonian＝$iE/c=i\mathcal{H}/c$。然るに両方が全対象$\forall\psi$に恒等的に等しい事$-i\hbar\partial/\partial x_0\equiv i\mathcal{H}/c$.はあり得ない。だとすると特別な作用対象$\exists\psi$のみで成立. $x_0=ict$ と $p_0=iE/c$, の慮者を勘案した時, E には下限があり, 完全な共役対でない.

$$-i\hbar\partial\psi/\partial x_0=(i\mathcal{H}/c)\psi.\Leftrightarrow\quad i\hbar\partial\psi/\partial t=\mathcal{H}\psi. \qquad ❶②⑹$$

実は S 方程式は可観測な時間発展(反応速度)では無力である。定常系と摂動論では時間を陽にする事はできない。量子力学では「**時間変数は観測可能物理量にならない**」事が⑸定理を使用して証明される<時間の量子統計化の量子確率過程論へ>。

☞：力学構造は一般に Lagrangean で一意規定されるが、それは Hamiltonian でも同様.
時間発展では$\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_s(t)\to\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_s(t)\to\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_s(t)\to\cdots\cdots$の自己共役保存的解析的因果的な$\mathcal{H}_0\to$論理背反な$\mathcal{H}_s(t)$の**保守と革新が相互交代で実現**する事.
然るに非解析的$\mathcal{H}_s(t)$は**$\Delta t=0$ の瞬時特異現象**、だから時間微分なんて出来ない。
積分ならば OK, 詳細は量子確率過程力学。

⑺粒子的古典力学系$\mathcal{L}(q_\beta(t);q_\beta'(t))$を正準量子化すると,確率波動場である波動関数$\psi$が出現した。これを**第一量子化**と呼ぶ。以下③では**波動場と言う空間連続分布の力学変数の正準量子化**を実施するが、そこでは**素粒子性**が浮上<**第二量子化**>. 第一量子化の波動関数の真意は場の量子論での真空場の素粒子反粒子生成消滅の**真空偏極場**メカニズムを解して初めて了解できる。

⑻$[\mathbf{q}, \mathbf{p}]=i\hbar 1$. ⇒ $\Delta p\Delta q\geq\frac{1}{2}\hbar$.　<**不確定性原理**>.
$\Delta p^2=\langle\psi|\mathbf{p}^2|\psi\rangle-\langle\psi|\mathbf{p}|\psi\rangle^2$.　$\Delta q^2=\langle\psi|\mathbf{q}^2|\psi\rangle-\langle\psi|\mathbf{q}|\psi\rangle^2$.

一つ状態$|\psi\rangle$への正準共役変数対の同時測定の統計偏差値に関する不等式。
[**q, p**]の組の不確定関係は Fourier 変換対での周波数測定 f と周期計測時間 T との関係 $fT=1$ と等価である。

❷正準交換関係の原理(連続波動場)：

①古典波動場：

連続波動場の量子化は歴史的には電磁場に最初適用されて成功。前項では離散粒子系の量子化から量子波動場(波動関数)を得たが、波動場を量子化すると素粒子性が浮上。

②離散系から連続波動場系への移行：<$x_\nu \equiv (x_0=ict, x_1, x_2, x_3) \equiv x$>

電磁場 $A_\mu(x_\nu)$ の様な連続場も量子化としての交換関係が設定できる。その場合離散系と異なり、Lagrangean 等は空間密度量として定義される。

波動場は空間を微細細分化した極限。$\mathcal{L}(q_j(t); q_j'(t))$ の添字 j が空間座標 **x** に替わる。従って $q_j(t) \Rightarrow \psi_\alpha(x_0, \mathbf{x})$ に替わる, ψ_α は体積密度量, $\mathscr{L}$ も同様, α は波動場多成分添字.

$\mathcal{L}(t) = \iiint dx^3 \mathscr{L}(\psi_\alpha(x); \partial_\mu \psi_\alpha(x))$。<空間積分範囲は形式上は±無限大>

③Euler 方程式：

最終式の第二項は $\int dx^4$ は4次元表面積分にできるので**無限遠表面0**とおく。

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta \int dx^4 \mathscr{L}(\psi_\alpha(t); \partial_\mu \psi_\alpha(t)) \\
&= \int dx^4 [\delta \psi_\alpha \partial \mathscr{L}/\partial \psi_\alpha + \partial_\mu \delta \psi_\alpha \partial \mathscr{L}/\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)] \\
&= \int dx^4 \delta \psi_\alpha [\partial \mathscr{L}/\partial \psi_\alpha - \partial_\mu [\partial \mathscr{L}/\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)] + \int dx^4 \partial_\mu [\delta \psi_\alpha \partial \mathscr{L}/\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)].
\end{aligned}
$$

$0 = \partial \mathscr{L}/\partial \phi_\alpha - \partial_\mu [\partial \mathscr{L}/\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)]$。<**Euler 方程式**>

④ $\Pi_\alpha \equiv \partial \mathscr{L}/\partial(\partial_t \phi_\alpha) = (ic)^{-1} \partial \mathscr{L}/\partial(\partial_0 \phi_\alpha)$.<**$\psi_\alpha$ の正準共役運動量変数**>.

⑤Hamiltonian 密度：

$\mathscr{H}_0 \equiv \Sigma_\alpha \Pi_\alpha \partial_t \phi_\alpha - \mathscr{L}_0(\phi_\alpha(t); \partial_\mu \phi_\alpha(t))$。

$H_0 = \iiint dx^3 \mathscr{H}_0$.

⑥波動場の同時刻正準交換関係：

<$[A, B] \equiv AB \pm BA$、A, B は**自己共役演算子**, ±の＋は spinor 場, ーは boson 場>.

$[\phi_\alpha(x_0, \mathbf{x}), \phi_\beta(x_0, \mathbf{y})] = [\Pi_\alpha(x_0, \mathbf{x}), \Pi_\beta(x_0, \mathbf{y})] = 0$;

$[\phi_\alpha(x_0, \mathbf{x}), \Pi_\beta(x_0, \mathbf{y})] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) 1$.

☞：Cronecker's delta $\equiv \delta_{jk}$ が体積密度移行すると体積分で回復する事から Dirac δ 関数 $\equiv \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ になる意味が了解される。 δ 関数は通常の関数でなく**超関数**と言われる。と言う事は左辺の場演算子 ψ_α, Π_β の積が右辺で超関数になると言う事は場演算子は超関数の類になる。場の量子論では反応の Hamiltonian 密度が場演算子積になり、然るに超関数 $\psi_\alpha(x)$, $\Pi_\beta(x)$ 等の特異移転点 x を共有する積は一般に超関数論では定義確定されない。この事が反応が因果的でなく**確率化の起源**になってる[5)]。

☞：量子化する波動場原型 Ψ は複素関数的、そこで $\Psi + \Psi^* \equiv \Psi$ で実数化.
かくて波動場演算子も**自己共役演算子化**<以下の⑦⑸ ψ, A_μ 等を参照>。

⑦波動場交換関係の物理的意味要約：

⑴そもそも交換関係を規定された波動場 ϕ はここでは**演算子化**してる。演算子は当然作用すべき対象＝関数＝**量子状態ベクトル Ψ** を前提としてる。Ψ は「如何なる状態の素粒子が何個ある」かを表現する事で量子状態<**個数表示**>を記述する。

⑵如何なる状態と言うのは反応と反応の間に存在する非反応的なHamiltonian≡$\mathcal{H}_0$の固有状態として規定される。通常の摂動論(素粒子衝突反応)の前後では相互作用皆無の自由粒子の運動エネルギ-だけを持つHamiltonianになる。$\mathcal{H}_0$は自己共役に限る。

⑶すると演算子はその内容を書き換えるから、素粒子数を変える作用を担う(**素粒子反応**).時間発展とは過去を**消滅**し,現在を**生成**する連続過程に他ならない.素粒子反応に即せば、元の粒子を消滅、次の粒子を生成となるだろう。

⑷然るに自由運動素粒子の個々は**自由波動場方程式解**として全て a(p;s)exp[px/iℏ]の**単色波動関数**形式になる。a(p;s)は自由運動素粒子の全物理量を搭載、一般的な波動場 ϕ は a(p;s)の物理量(p;s)の離散物理量 s 総和、連続物理量 p の「$\mathcal{H}_0$の固有状態の線形和」*) である **Fourier 積分**。以下の ϕ(x)は波動場方程式の解。

$$\phi(x)=\Sigma_s\iiint dx^3\{\exp[\mathbf{px}/i\hbar]\mathbf{a}(p,s)+\exp[-\mathbf{px}/i\hbar]\mathbf{a}^*(p,s)。$$

前項と後項は複素共役的だから、ϕ(x)の実数性～自己共役演算子性を表現すると同時に消滅演算子前項と生成演算子後項を持つ事にもなる。

⑸Fourier 係数 $\mathbf{a}^{\pm}$(p,s)は上記議論結果の ϕ 機能としての**生成消滅演算子**を内包せねばなるまい。上記 ϕ の Fourier 積分表現は⑥**波動場の同時刻正準交換関係**としての**拘束関係**があり、実はそれが物理量(p,s)の素粒子の**生成消滅演算子 $\mathbf{a}^{\pm}$**を同様な交換関係で規定する事で原理上の**反応計算法の論理**が閉じると言う仕組みになる。
下図は横軸は空間、縦軸は時間の素粒子運動軌跡の **Feymann 図**。なほ陽電子 e+線は矢印時間逆走になる事に注意！。

⑹一度反応の **Feymann 図**を指定すると摂動計算法が図形に従い決まる仕組みがある。
その計算原理発端は⑧⑨。

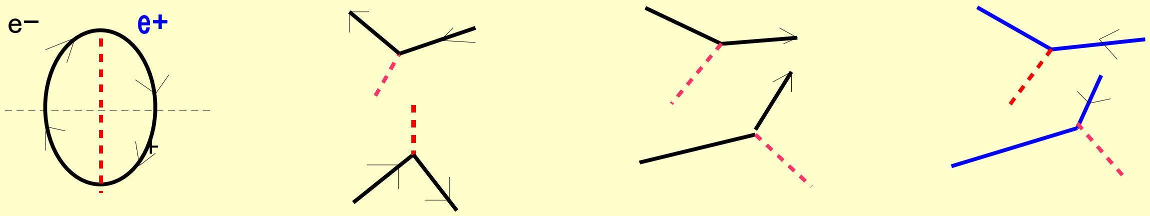
*) 「$\mathcal{H}_0$の固有状態の線形和」は状態関数でなく**波動場演算子**に限って成立する。

従来量子論での波動関数 ψ は $\mathcal{H}_0$の固有状態 ψ_kの線形和$\Sigma_k a_k\psi_k$ が S 方程式解になるので保存物理量的な自己共役 Hamiltonian $\mathcal{H}_0$下で固有状態の線形和が実現と誤解があった<Schroedinger’s dog>。だが$\mathcal{H}_0$下では時間発展もなく、しかも固有状態は一意に確定存在が厳密に証明される<**量子遷移の Markov 過程性**>. **波動場演算子はもはや量子状態ではない！**、この事は場演算子経路積分による Faddeev.Popov 量子化での成功からも確信できる事である。問題は摂動論等での中間**状態**処理にある。

*) 「保存物理量的な自己共役な$\mathcal{H}_0$の固有状態一意性実現」は⑴$\mathcal{H}_0$の下では時間発展がないことの証明があり、△E＝0、次に⑵もし線形和的実現だと energy 揺動△E＞0 から定常であることができない事に由来してる。

⑺-**電子電磁場素粒子基礎反応-** <実線上矢印＝電子線,下矢印＝陽電子線,破線＝光子線>

(b)真空偏極終端　(d)対創生　(f)電子の光子吸収　(h)陽電子の光子吸収



(a)真空偏極創生　(c)対消滅　(e)電子の光子放射　(g) 陽電子の光子放射

(i) $H=\iiint dx^3\mathcal{H}=\iiint dx^3 j_\mu A_\mu=\iiint dx^3[e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)]A_\mu(x)$.・・・・・<**量子電磁力相互作用**>

(j) $\langle f|T\cdot\exp[\int dx^4\mathcal{H}|/i\hbar]|i\rangle=T_{fi}$. :
反応作用$\mathcal{H}$によって初期状態$|i\rangle$→終状態$\langle f|$に遷移する**確率振幅** T_{fi}, その絶対値自乗が確率(密度)に対応。$T\cdot\exp[\int dx^4\mathcal{H}|/i\hbar]$の意味は⑧⑨。

(k) $\bar{\psi}(x)=\Sigma_s\iiint dp^3\{\mathbf{b}(p,s)\bar{v}(p,s)e^{(-px/i\hbar)}\}+\mathbf{a}^+(p,s)\bar{u}(p,s)e^{(+px/i\hbar)}\}$.
(l) $\psi(x)=\Sigma_s\iiint dp^3\{\mathbf{a}(p,s)u(p,s)e^{(-px/i\hbar)}\}+\mathbf{b}^+(p,s)v(p,s)e^{(+px/i\hbar)}\}$.
(m) $A_\mu(x)=\Sigma_\lambda\iiint dq^3\varepsilon_\mu(q,\lambda)\{\mathbf{c}(q,\lambda)e^{(-qx/i\hbar)}\}+\mathbf{c}^+(q,\lambda)e^{(+qx/i\hbar)}\}$.

(n) $\mathbf{a}^+(p,s)|0\rangle$は真空状態$|0\rangle$に作用して物理量(p, s)の電子生成状態$\mathbf{a}^+(p,s)|0\rangle$の演算子、逆に$\mathbf{a}(p,s)[\mathbf{a}^+(p,s)|0\rangle=|0\rangle$で消滅子。**b** は陽電子、**c** は光子の生成消滅子。

(o) $u(p,s)e^{(+px/i\hbar)}$は電子単色波動関数。$v(p,s)e^{(+px/i\hbar)}$は陽電子、$\varepsilon_\mu(q,\lambda)e^{(+qx/i\hbar)}$は光子。
s は電子、陽電子の spin 角運動量, $\lambda=0$ は縦波光子(誘電分極場)、$\lambda=1,2,3$ は横波光子(通常の電磁場光子).

(p) $\mathcal{H}$は合計 2x2x2＝8 個の生成消滅演算子の組み合わせになるから((k)(l)(m)→(i)へ代入)、8 種の基礎一次反応の存在が判る。　**反応は時空一点での自由素粒子衝突。**

(q) 真空偏極創始 : $|i\rangle=|0\rangle\rightarrow|f\rangle=\mathbf{a}^+(p,s)\mathbf{b}^+(p,s)\mathbf{c}^+(q,\lambda)|0\rangle$.
「真空状態$|0\rangle$から電子 $\mathbf{a}^+(p,s)|0\rangle$, 陽電子 $\mathbf{b}^+(p,s)$, 縦波光子 $\mathbf{c}^+(q,\lambda)|0\rangle$を創生。

(r) 真空偏極終端: $|i\rangle=\mathbf{a}^+(p,s)\mathbf{b}^+(p,s)\mathbf{c}^+(q,\lambda)|0\rangle.\rightarrow|f\rangle=|0\rangle$.
反応には 8 種の内の $\mathbf{a}(p,s)\mathbf{b}(p,s)\mathbf{c}(q,\lambda)$の積の項が作用してる。

上述の反応計算の趣旨概要は以下⑧⑨の通り。

⑧状態ベクトルΨに関するSchroedinger方程式：

$$i\hbar\partial\Psi(t)/\partial t=\mathbf{H}(t)\Psi(t). \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(t)=\Psi(t_0)+(i\hbar)^{-1}\int_{t_0}^{t}du\,\mathbf{H}(u)\Psi(u).$$

⑨逐次代入解と摂動論、反応確率振幅$T_n=\langle f|S_n(\infty,-\infty)|i\rangle$。

上記⑧を初期条件$\Psi(t_0)$として$\Psi(t)$を逐次代入法で形式的に解く事ができる(**摂動論**)。

$$\begin{aligned}\Psi(t)&=\Psi(t_0)+(i\hbar)^{-1}\int_{t_0}^{t}dt_1\,\mathbf{H}(t_1)\Psi(t_1)\\&=\Psi(t_0)\\&+(i\hbar)^{-1}\int_{t_0}^{t}dt_1\,\mathbf{H}(t_1)\Psi(t_0)\\&+(i\hbar)^{-2}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\,\mathbf{H}(t_1)\mathbf{H}(t_2)\Psi(t_0)\\&\cdots\cdots\cdots\\&+(i\hbar)^{-n}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-2}}dt_{n-1}\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\,\mathbf{H}(t_1)\mathbf{H}(t_2)\cdots\mathbf{H}(t_{n-1})\mathbf{H}(t_n)\Psi(t_0)\\&\cdots\cdots\\&\equiv T\cdot\exp[\int dx^4\mathscr{H}|/i\hbar]\end{aligned}$$

$\equiv T\cdot\exp[\int dx^4\mathscr{H}|/i\hbar]$。<T·時間順序付け作用の指数関数表現[5)]>.

☞：⑧の解は形式的に$\Psi(t)=\exp[\int dt\,\mathbf{H}(t)|/i\hbar]\Psi(t_0)$.と一見書けそうなのだが。

第n項目S_nは**n次反応**に対応。実際の摂動論での時間tは$[-\infty,+\infty]$での経過。
$T_n=\langle f|S_n(\infty,-\infty)|i\rangle$は初期状態$\Psi(t_0)=|i\rangle$から最終状態$|f\rangle$に(n−1)個中間状態を経由しての遷移確率振幅、確率密度は$|T_n|^2$.

反応作用	$\mathbf{H}(t_1)\leftarrow$	$\mathbf{H}(t_2)\leftarrow\cdots$			$\leftarrow\mathbf{H}(t_{n-1})\leftarrow$	$\mathbf{H}(t_n)$	
	↓	↓			↓	↓	
最終状態$\lvert f\rangle\leftarrow$	$\lvert m_{n-1}\rangle\leftarrow$	$\lvert m_{n-2}\rangle\leftarrow\cdots$	$\cdots\lvert m_2\rangle\leftarrow$		$\lvert m_1\rangle\leftarrow$	$\lvert i\rangle$**初期状態**.	
	<<　中 途 経 由 の 中 間 状 態　>>						

☞：$1=\Sigma_{p=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|$は単位演算子、$\langle f|\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\cdots\mathbf{H}_{n-1}\mathbf{H}_n|i\rangle=$
$=\Sigma_{m1,m2,\ldots,mn-1=0}^{\infty}\langle f|\mathbf{H}_1|m_{n-1}\rangle\langle m_{n-1}|\mathbf{H}_2\cdots\mathbf{H}_{n-1}|m_1\rangle\langle m_1|\mathbf{H}_n|i\rangle$。

☞：摂動論の議論では上記如く途中経由の**中間状態**を全て数え上げる結果,高次摂動計算では無限大値が生の計算では出現、正しい理論は確率理論と言えど名命題は決定論命題になるから、完全性定理により**有限確定値**を与えねばならないから本来的は矛盾。従来は無限大を相殺する**繰り込み項**を用いて有限化。正しい理論では$|i\rangle,|m_1\rangle\cdots|m_{n-1}\rangle,|f\rangle$は全て非反応的な自己共役Hamiltonian(通常は自由粒子、又は束縛系)の固有状態にあり、標本過程では唯一存在になる<詳細は陽に反応時間経過記述の**量子確率過程力学,** 多次反応は**一次反応確率**からMarkov過程として合成計算される>.
上記理由等で筆者は摂動論を真面目に取り組んだ事がない。

[第１部]：正準量子化の原理(要約)：
「なぜ正準量子化か？。なぜ量子力学になるかの”鍵”だが,良く判りますか？」.

(1)[**第０部**]で最精密観測対象(量子状態)が固有値ベクトル(正規直交関数系{ψ_α}、可観測物理量{$Q^{(k)}$}が(線形)自己共役演算子で観測値はその固有値{$q^{(k)}$}だった。

→　$|Q^{(k)}|\psi_\alpha\rangle = q_\alpha{}^{(k)}|\psi_\alpha\rangle$.　　　→**〈物理量の固有値問題〉**

(2)可観測物理量には同時に測定値が確定した組になる可換演算子の集合Ｑと非可換演算子の集合Ｐに二分。**可換演算子**の組は相互関数関係で絡がる。Taylor 展開を考えれば判る。

(3)**正準共役変数の交換関係定理：**

Relich-Dimier 定理によれば正準変数対$[q,p]=i\hbar\,1$はUnitary 変換でＳ型になる。
Ｓ型は数学的に自明だから**正準交換関係成立は原理どころかただの定理に成り下がる.**
$[q,p]=i\hbar\,1.$ ⇔　Unitary 変換　⇔　$[q,-i\hbar\partial/\partial q]=i\hbar\,1.$

(a) 力学系$\mathcal{L}(q_\beta(t);q_\beta'(t))$を規定すると$p_\beta\equiv\partial\mathcal{L}/\partial q_\beta'$。($q_\beta'$の正準共役運動量)。
$\partial\mathcal{L}/\partial q_j=dp_j/dt$, $\partial_t W(q_j,P_j=\beta_j)/=H(q_j,p_j=-\partial W/\partial q_j)$.　〈H-J 偏微分方程式〉
$p_j=-\partial W/\partial q_j$。かように古典力学でも**正準運動量は座標微分と関連**してる。

(b)**非可換演算子**の対典型例は座標ｑとその微分演算子$-\partial/\partial q$. $[q,-\partial/\partial q]f(q)=f(q)$
→　$[q,-i\hbar\partial/\partial q]=i\hbar\,1$. $-i\hbar\partial/\partial q$のｉは**自己共役化**で必須、$\hbar$次元量はFourier変換対[pq]次元に一致。$\hbar$次元が**作用量**になるのは断熱不変性に由来する？、

(c)**「正準共役演算子、その固有関数はForier 変換で相互反対称、対称関係にある」**。

$\psi(q)=(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\Psi(p)\,e^{-pq/i\hbar}$.　⇔　$\Psi(p)=(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,\psi(q)\,e^{pq/i\hbar}$.

(d)**ｑの固有関数系：** $q\ \delta(q-q')=q'\ \delta(q-q')$.
$F\delta(q-q')=(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,\delta(q-q')\,e^{pq/i\hbar}=(2\pi\hbar)^{-1/2}e^{pq'/i\hbar}$

(e)$-i\hbar\partial_q$**の固有関数系：**$(-i\hbar\partial_q)(2\pi\hbar)^{-1/2}e^{-pq/i\hbar}=p(2\pi\hbar)^{-1/2}e^{-pq/i\hbar}$
$F(2\pi\hbar)^{-1/2}e^{-pq/i\hbar}=(2\pi\hbar)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,e^{-p'q/i\hbar}e^{pq/i\hbar}=\delta(p-p')$.

(f)$[-i\hbar\partial_q\psi(q)]=pN\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,e^{pq/i\hbar}\psi(q)=[p\Psi(p)]$.

(g)$F[q\psi(q)]=i\hbar\partial_p N\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,e^{pq/i\hbar}\psi$　$=[i\hbar\partial_p\Psi(p)]$〈**符号反転！**〉

(4)Poisson 括弧→$\{q_\beta,p_\beta\}=i\hbar 1$の対応の**正準交換関係**が核心。→**〈反応確率振幅問題〉.**
(a)Schroedinger 方程式の一般導出や
(b)素粒子生成消滅反応等の量子系演算基礎原理を与える。

(5)正準量子化成果は**一般 guage 場量子化** Lagrangean$(\mathscr{L}_B+\mathscr{L}_{FP})$. →**〈全相互作用形式決定〉.**

(6)Faddeev. Popov 項 Lagrangean：$\mathscr{L}_{FP}=\{i\hbar\hat{c}^a\partial_\mu D_\mu c^a\}$. $\mathscr{L}_B=\{B^a\partial_\mu A^a{}_\mu+½\alpha^a B^a B^a\}$。
経路積分法と呼ぶ反応確率振幅$|i\rangle\to|f\rangle$計算経路途中にguage 変換自由度相当分の過剰が起きる。そこで電磁場も含む一般 guage 場では guage 変換固定化：$0=\alpha^a B^a+\partial_\mu A^a{}_\mu$で経路被積分関数に$\delta(\alpha^a B^a+\partial_\mu A^a{}_\mu)$を組み込むがその反動で１にする補正(Faddeev. Popov 項)が必要化。$\{\hat{c}^a,c^a\}$はB^a場に次ぐ**双極子密度次元量**で重要な核子双極子形成quark 反応の媒介裏方になる。

(7)**「結局量子論て何なんだ！」〈正準量子化原理がもたらす量子力学構造〉**。
(a)定常系物理量の固有値問題：$H_0\psi_n=E_n\psi_n$.　←　観測論理に由来.
(b)時間進展状態遷移確率振幅：$i\hbar\partial_t\Psi(t)=\mathbf{H}(t)\Psi(t)$.　⇔　$\Psi(t)=T\exp[\int_{t0}^t du\,\mathbf{H}(u)/i\hbar]\Psi_0$
〈摂動論には問題あり〉$T_{fi}=\langle f|T\exp[\int_{t0}^t du\,\mathbf{H}(u)/i\hbar]|i\rangle$.　↑時間順序積の形式解。

(c)相互作用力Ｈを決めるのが次２部”変換原理”：Ｈ決定は古典力学･電磁力学にも由来.

[第２部]：変換不変性の原理：

遠隔力相互作用の無い粒子系など本来無いが、相互に隔離した極限では成立すると想定する。
かような時空系粒子は一様等速慣性運動する事が特徴<相互に力が働けば加速度運動に>、
慣性運動系と**加速度系**は論理背反に留意、後に重大議論になる。

慣性系の特殊相対性原理に由来する**大域 Lorentz 共変性**は自由運動素粒子波動方程式を与える。加速度系が重力場と物理等価になる事は局所慣性系(微小時空間での慣性系)の意味になり、**局所 Lorentz 共変性**とは変換が時空各点 x の関数になる<大域変換は定数>事が要請され、それは統一的な量子重力場相互作用 SO(N;1)を規定。そこから宇宙での全部の相互作用<大統一力, 強力 SU(3)、弱力 SU(2)、電磁力 U(1)>全てが導出される事になる。

❶相互作用の無い自由空間波動場の方程式<特殊相対原理と Lorentz 共変性>:

慣性系時空中の名直交座標系 $x_\mu \equiv (x_0=ict, x_1, x_2, x_3)$相互の間では Lorentz **変換性** が成立。
その由来は名座標系はいずれも物理的に違いがないという**平等性<特殊相対性原理>**にある。

(1)いかなる座標系 K と K’の**物理方程式は同一形式<共変性>**になる。典型例は電磁場方程式。
(2)任意座標系真空中の物理的因果伝播速度上限値は c_0.(真空光速度)の**不変定数**になる。
時刻 t＝t’＝0 で原点を同一にした相互慣性運動の座標系 K, K’で光球波面上の座標関係から次式が(3)から成立。

(3) **4 元 vector と世界間隔：ds^2：** ***本論は全て直交座標系(x)での議論！.***

$c_0^2dt^2=(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)$、$c_0^2dt'^2=(dx'^2_1+dx'^2_2+dx'^2_3)$。

$0=-c_0^2dt^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\equiv ds^2=ds'^2\equiv -c_0^2dt'^2+dx'^2_1+dx'^2_2+dx'^2_3$ 。

世界間隔：$ds^2\equiv\Sigma_{\mu=0}{}^3 dx_\mu{}^2$は任意座標系での **scalar 不変量**になる。4 次元空間の vector 長を不変にする線形変換 L は直交変換だが $x_0=ict$,のみ虚数になるから **Lorentz 変換**と呼ばれる。L 変換で vector 長が不変になる量を **4 元 vector** と呼び重用になる。

(4) $dx'_\mu=\Sigma_{\nu=0}{}^3 L_\mu{}^\nu dx_\nu\equiv L_\mu{}^\nu dx_\nu$.　<Lorentz 変換>
4 次元空間の回転操作に相当する。反復出現の添字には総和をとるの Einstein 規約.
なほ Greek 添字 $\mu,\nu=0,1,2,3$;Latain 添字 $k, l=1,2,3$(空間成分のみ)と規約。

(5)**固有時間**：$ds^2\equiv -c_0^2dt^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=ds'^2\equiv -c_0^2d\tau^2$。
運動体に座標原点が固定した時($dx'_k=0$)の時間経過 $d\tau$ は L 不変量になる。

$-c_0^2+\underbrace{(d\mathbf{x}/dt)^2}_{=v}=(ds/dt)^2\equiv -c_0^2(d\tau/dt)^2$。 ⇒ $1-\beta^2\equiv(d\tau/dt)^2$。　$\langle\beta\equiv v/c_0\rangle$
$ds/dt=ic_0(d\tau/dt)$.
$dt/ds=(ic_0)^{-1}(dt/d\tau)=(ic_0)^{-1}/(1-\beta^2)^{1/2}$。⇒ $ic(dt/ds)=1/(1-\beta^2)^{1/2}$。
$d\mathbf{x}/ds=(d\mathbf{x}/dt)(dt/ds)=\mathbf{v}/(ic_0)(1-\beta^2)^{1/2}$。

(6) **4 次元運動量：**

$im_0c_0(dx_\mu/ds)\equiv p_\mu$＝は m_0c_0 が静止質量 X 光速定数、(dx_μ/ds)は 4 元 vector＝dx_μ を不変量 ds で微分してるから 4 元 vector。その vector 長自乗を求めると、**不変量**が出る。

$p_\mu\equiv im_0c_0(dx_\mu/ds)=[im_0c_0/(1-\beta^2)^{1/2},\ m_0\mathbf{v}/(1-\beta^2)^{1/2}]=[iE/c、\mathbf{p}]$. $\langle E=m_0c_0{}^2/(1-\beta^2)^{1/2}\rangle$

＊$p_\mu p_\mu\equiv-(m_0c_0)^2[\Sigma_{\mu=0}{}^3(dx_\mu/ds)^2]=-(m_0c_0)^2[(ds/ds)^2]=-(m_0c_0)^2$。

$p_\mu p_\mu=-(m_0c_0)^2$が相互作用の無い自由波動場基礎方程式を与える事になる。

⑺ guage 場式：spin 整数対応の Bose 粒子系波動場の Dalambert 方程式の形式的導出：

物質世界は spinor 粒子場とそれらの間の相互作用に介在する guage 粒子場の二つから構成されるが前者は**物質**と呼ばれるが、後者は**真空場の一つの秩序姿態**とみなされる。
真空は0＝+a(**素粒子**)－a(**反粒子**)とその物理量が±対象の各種素粒子分離と再結合消滅の超振動場(**真空偏極**)であり,無であり,無でない超現象世界。この±a の全体秩序が電磁場光子(誘電分極的な**縦波光子**と電子 spin 整列的な**磁界的横波光子**)の様な質量0が guage 粒子場、物質 spinor 場はこの0から跳び出た+a(素粒子)、又は－a(反粒子)。

量子論では運動量は微分演算子に対応〈❶②⑸〉するから即座に次式が得られる。

$p_\mu = -i\hbar\partial_\mu$。 → $0 = [p_\mu p_\mu + (m_0c_0)^2]\phi = [-\hbar^2\partial_\mu\partial_\mu + (m_0c_0)^2]\phi$。

$\Box \equiv \Sigma_{\mu=0}{}^3\partial_\mu{}^2$. → $0 = [\Box + (m_0c_0/\hbar)^2]\phi$.

⑺ $m_0=0$ だと光子（電磁場 4 元 potential 波）：→ $0 = \Box A_\mu$.〈μ=0, 1, 2, 3〉

⑻ spinor 場式：spin 半整数対応の Fermi 粒子系波動場の Dirac 方程式の形式的導出：

上記⑺の方程式は時間 2 階で物質場 Schroedinger 方程式にはなれない。そこで以下如く因数分解してしまう。それが無矛盾に成立する条件が γ^μ **行列の反交換関係**になる。
〈$p_\mu p_\mu \equiv \Sigma_{\mu=0}{}^3 p_\mu p_\mu$ に留意〉

$$0 = [p_\mu p_\mu + (m_0c_0)^2]\psi \equiv [i\gamma^\mu p_\mu + m_0c_0][-i\gamma^\nu p_\nu + m_0c_0]\psi = [\gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu + (m_0c_0)^2]\psi.$$

→ $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}1$. 〈$\gamma^\mu$ **行列の反交換関係**〉

かくて 1 階の相対論的物質場 Schroedinger 方程式≡**Dirac 方程式**が得られる。γ 行列は最低 4X4 次元から成立するがそれ以上の高次元 N でも上記関係で定義される。この結果 ψ（spinor）の方も NX1、1XN の**多成分場**になる。

⑻ $0 = [-i\gamma^\nu p_\nu + m_0c_0]\psi = [\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + m_0c_0]\psi$。 〈自由場 **Dirac 方程式**〉

ψ は「**大きさ実数０の点模型素粒子**」にも係わらず，自転角運動量（spin）を持つ。
更に**物質**としての電子と反物質として陽電子の存在もこの方程式が明らかにした。
ψ の電子論等は過去に矛盾事実を見ていない。

⑼自由（guage）場の Lagrangean：

$0 = [\Box + (m_0c_0/\hbar)^2]\phi$ を Euler EQN とする Lagrangean は次に決定する。

$\mathscr{L} = -½(\partial_\mu\phi)^2 + (m_0c_0/\hbar)^2\phi^2$.

☞：電磁場方程式も $m_0=0$ の $0=\Box A_\mu$. なのだが、$\mathscr{L}_{EM}$＝は上記とは異なるので要別途議論。

→ $\mathscr{L}_{EM} = -½\mu^{-1}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2$.

⑽自由 spinor 場の Lagrangean：〈$\overline{\psi} \equiv \psi^{*T}\gamma^0$, ***T** は複素共役と行列転置〉.

$\mathscr{L}_\psi$＝の場合は電磁相互作用の結果から ψ と $\psi^{*T}\gamma^0$ は独立に変分すると言う理屈で次式が成立が要求される。

$\mathscr{L}_\psi = -gc\overline{\psi}([\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + m_0c_0]\psi$.

❷ spinor 場$\mathscr{L}_\psi$の guage 変換不変性と一般 guage 相互作用：

参考文献：R. Utiyama, Phys. rev. 101 (1956), 1597, invariant theoretical interpretation of interaction.

①大域 guage 変換不変性：

[第０部]：❻で⑻大域 guage 変換不変性という事に言及した、再度加筆詳細に書けば、

状態 ψ は複素関数、それを $\psi\to\psi e^{i\theta}$. と位相変換しても上記 p≡<ψ|**P**|ψ>は不変。
$\int dx\psi^* e^{-i\theta}$ **P** $\psi e^{i\theta} = \int dx\psi^*$ **P** $\psi \equiv$<ψ|**P**|ψ>。但し θ は定数<**大域 guage 変換**>,

$\theta=\theta(x)$ と時空変数依存の関数になった場合が**局所 guage 変換**、
この変換下でも Lagrangean の不変要求すると相互作用力が浮上<**一般 guage 原理**>

②一般 guage 原理<局所 guage 変換不変性>：

⑴ U(1) 電磁場の局所 guage 不変性：

$\psi\to\psi e^{i\theta(x)}\equiv\psi'$ と $\theta=\theta(x)$ の時空変数依存の関数になった場合の **[第２部]❶**⑽ の $\mathscr{L}_\psi$＝の変化分を見てみる。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\psi'} &= -c\psi^{*T}e^{-i\theta(x)}\gamma^0([\hbar\gamma^\nu\partial_\nu+m_0c_0]\psi e^{i\theta(x)}\\ &= -c\hbar\psi^{*T}e^{i\theta(x)}\gamma^0\gamma^\nu\partial_\nu(\psi e^{i\theta(x)})-m_0c_0c\psi^{*T}\gamma^0\psi\\ &= -c\hbar\psi^{*T}\gamma^0\gamma^\nu\partial_\nu\psi-m_0c_0gc\psi^{*T}\gamma^0\psi-c\hbar\psi^{*T}\gamma^0\gamma^\nu\psi\partial_\nu\theta(x)\\ &= -c\psi^{*T}e^{-i\theta(x)}\gamma^0([\hbar\gamma^\nu\langle\partial_\nu+\underline{\partial_\nu\theta(x)}\rangle+m_0c_0]\psi.\end{aligned}$$

かように$\mathscr{L}_{\psi'}$＝では<u>**$\partial_\nu\theta(x)$の余計な部分出現が見える**</u>。そこで元の$\mathscr{L}_{\psi'}$＝に guage 場 $gA_\nu(x)$ を入れて置けば $gA_\nu(x) \to gA'_\nu(x)=gA_\nu(x)+\partial_\nu\theta(x)$. の **guage 場変換則**で相殺不変量化できる事が容易に確認できる。　ここに g は結合定数。

$$\mathscr{L}_{QED}=-c\psi^{*T}\gamma^0([\hbar\gamma^\nu\langle\partial_\nu+gA_\nu(x)\rangle+m_0c_0]\psi。\qquad \langle\overline{\psi}\equiv\psi^{*T}\gamma^0\rangle.$$
$$\psi \to \psi e^{i\theta(x)}\equiv\psi'.$$
$$gA_\nu(x) \to gA'_\nu(x)=gA_\nu(x)+\partial_\nu\theta(x).$$

$$\mathscr{L}_{QED}=-c\psi^{*T}\gamma^0([\hbar\gamma^\nu\partial_\nu+m_0c_0]\psi-gc\hbar[\psi^{*T}\gamma^0\gamma^\nu\psi]A_\nu=\mathscr{L}_\psi-j_\nu A_\nu。$$

量子電磁力学 QED では $g=e/\hbar$ にとるので$\mathscr{L}_{QED}$＝第二項は **4 元的電流電磁場一般相互作用**になる事が判る。第一項は無相互作用の自由電子場になる。

⑵なぜ局所 guage 不変原理か？！<観測論理からの視点根拠>：

(a)観測対象である**量子状態**は関数空間の**正規直交系ベクトルの個々 ψ** に対応した。
(b)物理量はそれに作用する自己共役演算子 **Q** で, 固有値 q はそのベクトルの長さ伸張値。
　Q |ψ>=q|ψ>.
(c)ベクトル長と名ベクトル間角度を不変にする **Unitary 変換**では**固有値不変**。
　物理として肝心な事は最終観測値なのだから, **Unitary 変換**で絡がるは物理的に等価。
(d)上記⑴ U(1) 変換は正に長さと角度を不変にする Unitary 変換に他ならない。**不変性はいかなる時空点でも平等に成立せねばなるまい<局所変換不変性>.** これは正に物差しの単位呼称が各国バラバラでも仕事に支障ないのと 同じ事情でないか。
(e)「ならば**一般多成分 spinor 場に関しての $\psi^{*T}\gamma^0\psi\equiv\psi$** のベクトル(長)ノルムを不変にする**一般 Unitary 変換でも通用するはずだ！」。事実その通りだった！。**

⑶一般 guage 原理<一般局所 guage 変換での guage 相互作用 Lagrangean の不変性>：

☞：参考書：佐藤光,群と物理(物理数学特論),丸善,1992.東京。本項目は Lie 代数の知識が望ましいが
結果解釈には**線形代数(行列論)**の一般知識で OK.

⒜**一般 Unitary 無限小局所変換＝一般局所 guage 変換。**
無限小変換を連続操作すれば有限変換にもなるから議論は無限小変換で成立すれば OK.
線形 Lie 群 $\exp[i\varepsilon_a(x)G^a]$ が unitary である為には $\{G^a\}$ は**自己共役**であり,素粒子
物理量を規定する重要な**保存物理量**<変換不変性と保存物理量存在の一般定理>になる。

$$\delta\psi = i\varepsilon^a(x)G_a\psi = \langle \exp[i\varepsilon^a(x)G_a]-1\rangle\psi.$$

⒝ $\delta A_\mu{}^a = \partial_\mu\varepsilon^a + \varepsilon^b A_\mu{}^c f_b{}^a{}_c$. の形式の **guage 場変換則**で Lagrangean 不変性を証明する。
⒞**Lie 代数(≡guage 対称性)**の交換法則と構造定数 $f_a{}^c{}_b$：<対添字の総和規約に注意>

$$\{G_a, G_b\} = G_a G_b - G_b G_a = i f_a{}^c{}_b G_c.$$

⒟ $A_\mu{}^a(x) = \partial_\mu\varepsilon^a(x)$。<③⑹共変微分の意味参照>

$$0 = \partial_\mu(\varepsilon^a\varepsilon^b) = A_\mu{}^a\varepsilon^b + \varepsilon^a A_\mu{}^b。\langle \varepsilon^a\varepsilon^b \text{は二次微少量だから}0\rangle.$$

⒠証明を簡易にする為に共変微分形式 $D_\mu\psi$ を導入して置く。

$$0 = \delta\mathscr{L}(\psi;\partial_\mu\psi) = \delta\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + \delta(\partial_\mu\psi)\,\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\mu\psi). \leftarrow \text{「大局 guage 変換性」}$$

↓

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi;D_\mu\psi). \qquad ☞：D_\mu\psi \equiv \langle \partial_\mu - iA_\mu{}^a(x)G_a)\rangle\psi：\textbf{共変微分}.$$

↓

$$0 = \delta\mathscr{L} = \delta\psi\,\partial\mathscr{L}/\partial\psi + \delta(D_\mu\psi)\,\partial\mathscr{L}/\partial(D_\mu\psi))\rangle$$
$$= \delta\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + \delta(\langle\partial_\mu - iA_\mu{}^a G_a)\rangle\psi)\,\partial_D\mathscr{L}.$$
$$= \delta\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + \delta(\partial_\mu\psi - iA_\mu{}^a G_a\psi)\,\partial_D\mathscr{L}.$$
$$= \delta\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + \delta(\partial_\mu\psi)\,\partial_D\mathscr{L} - i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} - iA_\mu{}^a G_a\delta\psi\,\partial_D\mathscr{L}.$$
$$= \delta\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + \partial_\mu(i\varepsilon^a G_a\psi).\,\partial_D\mathscr{L} - i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + \varepsilon^b A_\mu{}^a G_a G_b\psi\,\partial_D\mathscr{L}.$$
$$= i\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + (i\varepsilon^a G_a\partial_\mu\psi).\,\partial_D\mathscr{L}$$
$$+ (i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi)\,\partial_D\mathscr{L} - i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + \varepsilon^b A_\mu{}^a G_a G_b\psi\,\partial_D\mathscr{L}.$$
$$= \langle i\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_\psi\mathscr{L} + i\varepsilon^a G_a\partial_\mu\psi.\,\partial_D\mathscr{L}\rangle \quad \leftarrow \text{「}\mathscr{L}\text{の大局 guage 不変性から消失」}$$
$$- i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + \varepsilon^a A_\mu{}^b G_b G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} \quad \leftarrow \text{上上上式}$$
$$= -i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} - \varepsilon^b A_\mu{}^a G_b G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} \quad \leftarrow (d)$$
$$= -i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} - \varepsilon^a A_\mu{}^b G_a G_b\psi\,\partial_D\mathscr{L} \quad \leftarrow \text{添字互換(上式)}$$

「上式と上上上式を足して 2 で割る」

$$= -i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} - \tfrac{1}{2}\langle \varepsilon^a A_\mu{}^b G_a G_b\psi\,\partial_D\mathscr{L} - \varepsilon^a A_\mu{}^b G_b G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L}\rangle$$
$$= -i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} - \tfrac{1}{2}\varepsilon^a A_\mu{}^b\langle G_a G_b - G_b G_a\rangle\psi\,\partial_D\mathscr{L}$$
$$= -i\delta A_\mu{}^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} + i\partial_\mu\varepsilon^a G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L} - \tfrac{1}{2}\varepsilon^b A_\mu{}^c\langle i f_b{}^a{}_c G_a\rangle\psi\,\partial_D\mathscr{L}$$
$$= -i[\delta A_\mu{}^a - \partial_\mu\varepsilon^a + \tfrac{1}{2}\varepsilon^b A_\mu{}^c\langle f_b{}^a{}_c\rangle]G_a\psi\,\partial_D\mathscr{L}.$$

(e) → $\delta A_\mu{}^a = \partial_\mu\varepsilon^a - \tfrac{1}{2}\varepsilon^b A_\mu{}^c\langle f_b{}^a{}_c\rangle$。 <**一般 guage 場変換則**>

☞：$\partial_\mu\varepsilon^a + g f_b{}^a{}_c\,\varepsilon^b A_\mu{}^c \equiv D_\mu\varepsilon^a$ も一般に**共変微分**という。g は guage 場 $A_\mu{}^c$ の結合定数。

③重力場＝Einstein等価原理＝Utiyamaの局所Lorentz変換不変：

重力場最大特徴は物質種類に無関係に全物質は一様な加速度運動になる。となるとその重力場の**時空局所点では局所慣性系に等価**になる。時空点x±△xの**微分体積空間中の**座標では慣性運動に見える事からその内部では**局所Lorentz変換** $dx'^{\nu}=a_{\nu\mu}(x)dx^{\mu}$. が成立するだろう(Utiyama,1956)。然るにL変換 $a_{\nu\mu}(x)$ は最早定数ではなく時空座標関数になる<**局所Lorentz変換**>。然るに従来重力論につき物の一般相対性理論としての一般曲線座標系でなく，**直交座標系**に於いては、一般guage理論が対象とする**内部座標変換**でない、**時空間座標変換**に係らず,spinor場Lgrangeanを共変微分形式の下で**完全なguage不変形式**になる事が1993年に発見された。対称性は**SO(N;1)**特殊Lorentz群,それは部分Lie代数として素粒子統一場論が完成されてる事を簡明に証明(Lie代数定理).

(1)　SO(11,1) → <u>SO(11) → SO(10) → SU(5)</u> → SU(3)×SU(2)×U(1)
　量子重力　　大統一論　　**強力**×弱力×電磁力。

以下では上記(3)(e)と同等のguage変換則をLagrangeanの変換不変性から証明:
$\delta A_{\mu}{}^{\alpha\beta}=\partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha\beta}+\frac{1}{4}\varepsilon^{\gamma\delta}A_{\mu}{}^{\varepsilon\zeta}(f_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta}{}_{\varepsilon\zeta})$.

☞: ***<u>本論は全て直交座標系(x)での議論.</u>*** 式中で反復出現する添字対は総和を取る規約。
座標添字個数は通常4だがN一般論でも通用に留意.

(2)**無限小Lorentz時空座標変換：** $a^{\nu}{}_{\mu}\equiv\delta^{\nu}{}_{\mu}+\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}$. → $x'^{\nu}\equiv a^{\nu}{}_{\mu}x^{\mu}$
$x'^{\mu}x'^{\mu}\equiv x^{\mu}x^{\mu}$. → $\varepsilon_{\nu\mu}=-\varepsilon_{\mu\nu}$. <**直交座標系での反対称性**>.
(3)**局所Lorentz変換と微分演算子の変換：** $dx^{\nu}=a^{\nu}{}_{\mu}(x)^{-1}dx'^{\mu}$.
$\partial/\partial x'^{\mu}=(\partial x^{\nu}/\partial x'^{\mu})\partial/\partial x^{\nu}=a^{\nu}{}_{\mu}(x)^{-1}\partial/\partial x^{\nu}$.

(4)**大域無限小Lorentz spinor変換：** $T\psi\equiv\psi'$.

$T=(1+\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta})$; $G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}$.

$\overline{\psi}'(x')=(T\psi(x))^{*T}\gamma^{0}=\psi(x)^{*T}T^{*T}\gamma^{0}=\psi(x)^{*T}\gamma^{0}T^{-1}=\overline{\psi}(x)T^{-1}$.

(5)**Dirac EQNの共変性とLorentz変換(4)の生成元の証明**：$(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}+\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}=2\delta^{\alpha\beta})$.
$[\hbar\gamma^{\mu}\partial'_{\mu}+mc]\psi'=[\hbar\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}\partial_{\nu}+mc]T\psi=T[T^{-1}\hbar\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}\partial_{\nu}+mcT^{-1}]T\psi$
$=T[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}T\partial_{\nu}+mc]\psi\equiv T[\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+mc]\psi=0.$ → $\gamma^{\mu}=T^{-1}\gamma^{\nu}a^{\mu}{}_{\nu}{}^{-1}T$.
$\rightarrow T\gamma^{\mu}T^{-1}=\gamma^{\nu}a^{\mu}{}_{\nu}{}^{-1}=\gamma^{\nu}(\delta^{\mu}{}_{\nu}-\varepsilon^{\mu}{}_{\nu})=\gamma^{\mu}-\gamma^{\nu}\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$.
$T\gamma^{\mu}T^{-1}=(1+\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta})\gamma^{\mu}(1-\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta})=\gamma^{\mu}-\gamma^{\nu}\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$。<**証明終わり**>

☞: $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu}$ 等は二次微少量で0.spinor変換は(5)線形変換 $a^{\nu}{}_{\mu}$ 存在から判る如く**直交系**のみで定義可能。

(6)**共変微分とguage場** <$A_{\mu}{}^{a}(x)=\partial_{\mu}\varepsilon^{a}(x)$>**.**
$\delta\psi=i\varepsilon^{a}(x)G_{a}\psi=$<$\exp[i\varepsilon^{a}(x)G_{a}]-1$>$\psi$.のUnitary変換は結果的に物理量に何ら変更を結果しないので一種の平行移動操作，そこで**共変微分**が定義される。

$\psi(x+\Delta x)_{//}\equiv\psi(x)+\delta\psi=\psi(x)+i\varepsilon^{a}(x)G_{a}\psi\equiv\psi(x)+i\Delta x_{\mu}A_{\mu}{}^{a}(x)G_{a}\psi$
$D_{\mu}\psi(x)\equiv\lim\Delta x_{\mu}\rightarrow 0,\ \Delta x_{\mu}{}^{-1}[\psi(x+\Delta x)-\psi(x+\Delta x)_{//}]=\partial_{\mu}\psi-iA_{\mu}{}^{a}(x)G_{a}\psi$。
$A_{\mu}{}^{a}(x)=\partial_{\mu}\varepsilon^{a}(x)$。

⑺ Lagrangean 変換不変要請からguage場変換則を導出(SO(N;1)guage 対称性):

☞:L変換 $a^{\nu}{}_{\mu}$ 由来でguage場 $A^{kl}{}_{\mu}$ がklの如く二重添字,例外的にここではLatainでK, l=0,1,2,3とする。

(a):

$\mathscr{L}(\psi';D_\mu\psi')$

$=-c\bar\psi'(x')[\hbar\gamma^{\mu}(\partial'_{\mu}-½A'^{kl}{}_{\mu}(x')G_{kl})+mc]\psi'(x')$

$=-c\bar\psi T^{-1}[\hbar\gamma^{\mu}(a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}\partial_{\nu}-½A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl})+mc]T\psi$

$=-c\bar\psi[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}\partial_{\nu}(T\psi)-½\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T\psi+mc\psi]$

$=-c\bar\psi[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}(\partial_{\nu}T\cdot\psi+T\partial_{\nu}\psi)-½\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T\psi+mc\psi]$

$=-c\bar\psi[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}T\partial_{\nu}\psi-½\hbar\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}\psi+mc\psi]$

$\quad-c\bar\psi[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}(\partial_{\nu}T\cdot\psi)-½\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T\psi]-c\bar\psi½\hbar\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}\psi$

$=-c\bar\psi[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}T\partial_{\nu}\psi-½\hbar\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}(x)G_{kl}\psi+mc\psi]$

$\quad-c\bar\psi[\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}(\partial_{\nu}T\cdot\psi)-½\hbar T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T\psi+½\hbar\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}\psi]$

↓

$(T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}T)=\gamma^{\nu}$。$\langle a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}=\delta^{\nu}{}_{\mu}-\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}\fallingdotseq\delta^{\nu}{}_{\mu}\rangle$.

↓

$=\mathscr{L}(\psi;D_\mu\psi)$

$-c\hbar\bar\psi[(T^{-1}\gamma^{\mu}a^{\nu}{}_{\mu}{}^{-1}T)T^{-1}(\partial_{\nu}T\cdot)-½T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T+½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}]\psi$

$=\mathscr{L}(\psi;D_\mu\psi)$

$-c\hbar\bar\psi[\gamma^{\nu}T^{-1}\partial_{\nu}T\cdot+½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}-½T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T]\psi.$

↓

(b): $0=\gamma^{\nu}T^{-1}\partial_{\nu}T\cdot+½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}(x)G_{kl}-½T^{-1}\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T.$

$\quad ½\gamma^{\mu}\ A'^{kl}{}_{\mu}G_{kl}=½T\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T^{-1}+T^{1}\gamma^{\nu}T^{-1}\partial_{\nu}T\cdot T^{-1}.$

$$½\gamma^{\mu}[\delta A^{kl}{}_{\mu}]G_{kl}\equiv½\gamma^{\mu}[A'^{kl}{}_{\mu}-A^{kl}{}_{\mu}]G_{kl}$$
$$=½T\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T^{-1}+T\gamma^{\nu}\partial_{\nu}T^{-1}-½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}.$$

(c) $T=(1-½\varepsilon_{kl}G^{kl})$; $T^{-1}=(1+½\varepsilon_{kl}G^{kl})$; $\partial_{\mu}\varepsilon_{kl}=A^{kl}{}_{\mu}$.

☞: T ; T^{-1} の内部符号逆転に注意。$\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\mu}=-\varepsilon_{rs}A^{pq}{}_{\mu}$。二次の $\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs}=0$ に注意.

$½\gamma^{\nu}[\delta A^{kl}{}_{\nu}]G_{kl}=½T\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}T^{-1}+T\gamma^{\nu}\partial_{\nu}T^{-1}-½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}.$

$=½(1-½\varepsilon_{pq}G_{pq})\gamma^{\mu}\ A^{rs}{}_{\mu}G_{rs}(1+½\varepsilon_{pq}G_{pq})+(1-½\varepsilon_{pq}G_{pq})\gamma^{\nu}\partial_{\nu}(1-½\varepsilon_{rs}G_{rs})-½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}$

$=½\gamma^{\mu}\ A^{rs}{}_{\mu}G_{rs}\ -¼\varepsilon_{pq}\gamma^{\mu}\ A^{rs}{}_{\mu}G_{pq}G_{rs}+¼\varepsilon_{pq}\gamma^{\mu}\ A^{rs}{}_{\mu}G_{rs}G_{pq}$

$-½\partial_{\nu}\varepsilon_{rs}\gamma^{\nu}G_{rs}+¼\varepsilon_{pq}\gamma^{\nu}A_{\nu}{}^{rs}G_{pq}G_{rs}-½\gamma^{\mu}\ A^{kl}{}_{\mu}G_{kl}.$ $\qquad\langle\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\mu}=-\varepsilon_{rs}A^{pq}{}_{\mu}\rangle$

↓

$=-½\partial_{\nu}\varepsilon_{kl}\gamma^{\nu}G_{kl}+¼\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\mu}\gamma^{\mu}G_{rs}G_{pq}=-½\partial_{\nu}\varepsilon_{pq}\gamma^{\nu}G^{pq}-¼\varepsilon_{rs}A^{pq}{}_{\mu}\gamma^{\mu}G_{rs}G_{pq}.$

$=-½\partial_{\nu}\varepsilon_{kl}\gamma^{\nu}G_{kl}-¼\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\mu}\gamma^{\mu}G_{pq}G_{rs}$ ←添字互換

$=-½\partial_{\nu}\varepsilon_{kl}\gamma^{\nu}G_{kl}-(1/8)\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\mu}\gamma^{\mu}[G_{pq}G_{rs}-G_{rs}G_{pq}].$ ←½(上式+上上式)

$=-½\partial_{\nu}\varepsilon_{kl}\gamma^{\nu}G_{kl}-(1/8)\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\nu}\gamma^{\nu}[f_{pq}{}^{kl}{}_{rs}]G_{kl}.$

$\delta A^{kl}{}_{\nu}=-\partial_{\nu}\varepsilon_{kl}-¼\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\nu}[f_{pq}{}^{kl}{}_{rs}].$ $\qquad T=(1-½\varepsilon_{kl}G^{kl})\to T=(1+½\varepsilon_{kl}G^{kl})$ 等に戻すと、

❷③⑺(c): $\delta A^{kl}{}_{\nu}=\partial_{\nu}\varepsilon_{kl}+¼\varepsilon_{pq}A^{rs}{}_{\nu}[f_{pq}{}^{kl}{}_{rs}].$ **〈重力場(等価原理)の一般 guage 変換則〉**

[第２部]：変換不変性の原理(要約)：

「変換不変性の原理」は量子化前の古典Lagrangean(**全相互作用力**)を一意決定、

☞：更に[第１部]の量子化原理で完成。**Lagrangean決定は全物理を決定する。**

❶時空間対称性と変換不変性：

「一般に物理量は時空間変数xの関数、その時空間の固有性質が物理を規定」。

(1)伝播速度上限値の不変性(真空定数の光速 $c_0=1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)}$ の運動絶対性)：

(2)等速慣性系と大域Lorentz変換(名大域座標系は物理観測的に平等)：
自由場Bose粒子系と自由場Fermi粒子系の**自由場Lagragean**$=\mathscr{L}(\psi;\partial_\mu\psi)$**決定。**

(3)**局所慣性系と局所Lorentz変換**(名局所座標系は物理観測的に自由平等)：
guage対称性SO(N;1)の**前量子化重力場Lagragean**$=\mathscr{L}_{GD}(\psi';D_\mu\psi')$**決定。**

☞:SO(N;1)は本来**(1+N)次元の時空間に関する対称性要請**だが、それが以下❷の**量子状態内部空間の対称性**(単純にLie代数定理)をも含んでしまう事が統一性の根拠にある。

❶(1)　SO(11,1) → SO(11) → SO(10) → SU(5) → SU(3)×SU(2)×U(1)
量子重力　大統一論　強力×弱力×電磁力。

❷状態ベクトル空間の物理量期待値に関する対称性＝局所guage不変性：

「一般に物理量は量子状態表示の内部座標系変数と演算子で規定されるが、物差しの様な物で各種自由度がある、その物差し(guage)間の変換不変量こそが物理内容の趣旨」。

(1) $q=\langle\psi|Q|\psi\rangle$の ψ 定数位相変換不変性：

(2) Unitary変換の同様な物理期待値不変性：大域一般guage不変性：

(3)**内部状態空間の物理量期待値に関する局所Unitary変換不変性＝一般guage原理：**
guage対称な**前量子化一般guage相互作用のLagragean**$=\mathscr{L}_{GF}(\psi';D_\mu\psi')$**決定。**

❸なぜ変換不変原理か？。

①そもそも最精密判別される**量子状態**とは**正規直交ベクトル系**に対応した。これらの本質は長さ１と相互に直角な**配置構造**にある.座標系はそれらを表現する物差しに過ぎない.だから**ベクトル配置構造**を不変にする物差し座標系の**平行移動**や**回転変換**は英語が日本語に翻訳されるの意味しかない。**ベクトル配置構造が不動である事が肝心だ。**

②測定は物差しによるのだが、ベクトル配置構造を不変にする種類の物差しだけが**物理的価値**がある。内部状態空間はそれで了解できよう。

③問題は時空構造の変換。然るに役者である**物理量**はその舞台である時空間変数の関数,演算子になる。時空間変数も物差しの一つにある事情は①②と違いがない。然るに時空間不変量こそが**４次元ベクトル長**,不変にするのが直交変換の**Lorentz変換**。

④相互作用は時間空間舞台での物質劇展開。だが**量子状態変化は時空状態変化**に他なるまい。「時間空間舞台＝場＝物質劇展開は同一」なのだと見れば**量子状態=時空状態.**
だから時空不変性である局所Lorentz変換が時空状態変化＝全相互作用に係るは必然、それは内部変換不変対称性をも含むのだ❶(1)。時空座標系も量子状態表示の内部座標系も統一座標系として,局所Lorentz変換がある事になる。因みに強い力SU(3)は(1+6)次元で物理的可能観測対象にない。quarkは異次元物質。

ー参考文献ー

１：R.Utiyama,Phys.Rev.**101**(1956),1957
２：L.D.Faddeev & V.N.Popov,Phys.Let.25B(1967).29.
３：R.Utiyama,Prog.Theo.Phys.Suppl.9(1959),19^44.

４：内山龍雄,一般ゲージ場序説,岩波書店,1987,東京。
５：N.中西、場の量子論,培風館,1975,東京。
６：九後汰一郎,ゲージ場の量子論Ⅰ,Ⅱ,培風館,1989,東京。
７：S.朝永,N福田,H福田,場の量子論,岩波書店,1955.東京。
８：高野文彦, 多体問題,培風館,1975,東京。
９：佐藤光,群と物理(物理数学特論),丸善,1992.東京。

10：Birkov,G.& Neumann,J,V:Ann.Math,2nd Ser,**37**,823(1936)
11：豊田利幸,並木美喜雄,量子力学Ⅲ20章(現代物理の基礎5),岩波,1972.東京。
12：L.I.Schiff,Quantum Mechanics,Magraw hill,1955.
13：ランダウ.リフッシツ,広重訳,場の古典論,東京図書,1964.東京。
14：:清水義雄、記号論理学、東京大学出版会、1984.。

15::鈴木基司,量子確率過程力学,時事問題解析工房,1990.
16:鈴木基司,非局所的双極子場の量子論,時事問題解析工房,1992.
17:鈴木基司,構造的物理認識の為の連続値論理学,時事問題解析工房,1992.
18:鈴木基司,量子重力力学と超統一場論,時事問題解析工房,1993^1996.
19:鈴木基司,現代物理科学最前線,時事問題解析工房,1998.

20:Nuzio Tralli、Clasical Electromagnetic Theory,Magrawhill-Kogakusya、1963.
21:新楽,田辺,権平編、共立物理公式集,,共立出版,1970.東京。

他に未公刊の自著論文多数あり。

後記：
今後も虫取り,追加の作業を予定、次期仕事があるので中断します(07/11/22)。
本来ならば量子力学基礎論で過去の誤りを完全修正し、かつ量子確率過程論で一般反応の時間論を厳密に展開して後、本論に言及すべきが正しい手順で、逆転していささか読者便宜に反した事とをお詫びします。他方以上成果を無視してる学会の態度にも重大問題！税金で過去14年も無意味な超弦理論や高額な素粒子加速器研究がなされてるは納税者にばれないからです。